MAI 2 - domácí úkol 5

Pokuste se příklady promyslet jako přípravu na příští cvičení (3.11.) a případně si připravit otázky k řešení daných úloh. V úkolu pak stačí vyřešit jeden z příkladů 1. a), b), c) a dále aspoň jeden z příkladů 2. a 3..

1. Ukažte, že rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=f(x)$. Pak aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu x_0 pomocí Taylorova polynomu 2.stupně, když
   a) $F(x,y)=xy-e^x+e^y$, $(x_0,y_0)=(0,0)$;
   b) $F(x,y)=x^2-y^3+x^2y-1$, $(x_0,y_0)=(1,0)$;
   c) $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-arctg(\frac{y}{x})$, $(x_0,y_0)=(1,0)$.

2. Dokažte, že rovnicí
$$z^3+y^3z^2-xyz+x^3-2=0$$
je v okolí bodu $(1,1,1)$ definována implicitně funkce $z=f(x,y),\ f\in C^2(U(1,1))$.
Pomocí lineární aproximace určete přibližně hodnoty $f(x,y)$ v okolí bodu $(1,1)$.
Vypočítejte smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $z=f(x,y)$ v bodě $(1,1)$.

3. Je dána rovnice
$$e^{z-2x}-xz+2yz-2y-xy^2=0$$
Ukažte, že touto rovnicí je definována implicitně funkce $z=f(x,y),\ f\in C^2(U(1,1))$, pro kterou je $f(1,1)=2$.
Určete $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)$.
Pomocí lineární aproximace určete přibližně hodnoty $f(x,y)$ v okolí bodu $(1,1)$.

Poznámka: $f\in C^2(U(1,1))$ zde znamená, že funkce $z=f(x,y)$ má spojité parciální derivace 2.řádu v okolí bodu $(1,1)$.